

ねじり剛性について

ねじりに関する力学は意外と古く、**Young** によりヤング率(1807)が提案される前に出来ていたようです。(参考:フックの法則(1660)はもっと前に出来ています。)

丸棒のねじりトルクの計算については、1784 年に電荷の **Coulomb's law** で有名な **Coulomb** が理論を導き出しています。この時点で断面二次極モーメント(**Polar moment of inertia**)という概念が生まれたようです。多分、 $J_0 = I_{xx} + I_{yy}$ もこの時点で出来上がっていたと思われます。この時に用いた仮定が“丸棒だとねじる前と後では面に変化が無い”でした。現在においてもこの仮定は使われています。数々の実験も行われていますのでこの仮定は正しいといえます。また、断面二次極モーメントが使える条件としては、トルク(T)の計算(腕(r)×力(F))で腕と力が常に直角になっていなければなりません。ところが、後に **Navier**(流体の)が **Coulomb** の理論を腕と力が直角にならない任意断面の棒のねじりに応用しています。Navier によると任意断面でも断面二次極モーメント($J_0 = I_{xx} + I_{yy}$)を用いてトルクが計算できると言っています。しかし、彼の考えは直ぐに否定されていたようです。このことは、1864 に発行された **Saint-Venant** の書物に書いてあるそうです。丸棒の場合、トルク(T)=腕(r)×力(F)を計算するとき、腕と力は常に直角になっていますので、トルクの計算が簡単になります。しかし、任意断面の場合は、腕と力が直角になりえません。特に境界では明白ですよ。したがって、断面二次極モーメントを使う **Navier** の考えは間違っていることになります⁽¹⁾。せっかく流体で名を上げた **Navier** でしたが、ねじりで汚点を残してしまいました。しかし、**Navier** はその他の部門で大活躍しています。そういうことで、任意断面のトルク計算は、そう簡単でないことがわかりますね。

ここでは、最初に丸棒のねじりを取り上げ、せん断応力、トルク、ねじり角間の関係について理解を深めます。その後、パイプと任意断面のトルク計算について述べます。任意断面のトルク計算では、**Saint-Venant** が 1850 年代に提案した方法と **Prandtl** が提案した応力関数を紹介します。

余談ですが、流体の **Navier-Stokes equations** は、**Navier** が導いています。しかし、彼は、流体の摩擦をキチンと説明出来なかったようです。そこで、**Saint-Venant** がキチンと説明し論文にしました。同時に、**Stokes** と **Poisson** も **Saint-Venant** と同じ内容の論文を(**Stokes** は 2 年後に)出しています。Navier- Saint-Venant equations にすべきなのでしょうが、どう言う訳か **Stokes** が割り込んできています。Navier- Poisson equations は有ります。Navier- Stokes equations ですが、現在においても疑問視される部分があり、u, v, w, P が問題なく解けることを証明できれば懸賞金がもらえます。“流体のソフトが市販されているのだから問題ないでしょう”と思うかもしれませんが、これは有限桁(多分有効 14 桁)で計算していますので、u, v, w からの不釣合いは全て P に誤差としてよせ集められていると考えられています。もし、有効 1000 桁またはそれ以上で計算が出来るとなった時に、はたして計算は収束

するでしょうか。

■丸棒のねじり

中身が詰まっている長さ(L)で半径(a)の丸棒をトルク(T)(又はモーメント)でねじった時のねじり角(ϕ)(**angle of twist**)を求めてみましょう。そのためには、下図に示す棒のハッチングが施されている面に発生しているせん断応力を知らなければなりません。

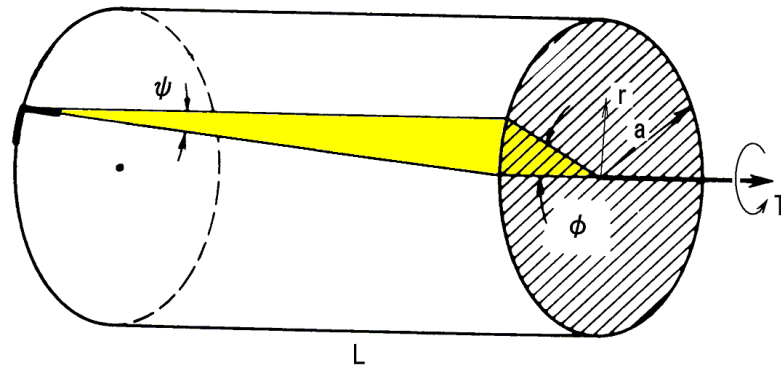


図 丸棒

ところで、弾性力学によるとせん断応力(τ)は、下式で与えられていましたね。Gはせん断弾性係数(**shear modulus**)、 γ は **shear angle**(せん断ひずみ)です。

$$\tau = G\gamma$$

では、shear angle(γ)は、どのように書けるかでしょう。上図から以下になります。

$$\gamma = \tan(\psi) \approx \frac{r\phi}{L}$$

式の r は、断面の半径方向の変数です。上図では、 $r=a$ での shear angle を示していません。ねじりの学問では、上式の ϕ/L を単位長さ当たりの**ねじり角(rate of twist)**と言って下式のように θ で表します⁽²⁾。本⁽³⁾によっては $d\phi/dx$ が使われています。

$$\theta = \frac{\phi}{L}$$

すると、上図のハッチングされている面に発生しているせん断応力は、 $\tau = G\theta r$ ですから、下式で書けることになりましたね。

$$\tau = G\theta r$$

せん断応力が何であるかが解りましたので、トルク(T)を計算することができます。トルクは、腕(r)×力(dF)を上図のハッチングされた面上で積分した結果ですから、次のようになりますね。本来ですと下式はベクトルで書くべきですが、腕(r)と応力(τ)は常に直角をなし、結果のトルク(T)も常に r-τ 面に対し直角になっています。上記を考慮し下式はスカラーで書いてあります。その点を十分に頭に入れておいて下さいね。

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r dF = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \tau dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \tau dr r d\phi = 2\pi \int_0^a r^2 (G\theta r) dr \\ &= 2\pi G\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= G\theta \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

また、ねじりの書物では、上式のトルクを以下のように書きます。これが 1784 年に生まれた **Coulomb の理論**です。GJ を K で置き換えると、バネの F=Kx に似た式になりますね。

$$T = G\theta J$$

ここに、J は下式になり、書物によると、J を断面二次極モーメント(**polar moment of inertia**)と言います。

$$J = \frac{\pi a^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

これで中身が詰まった丸棒のトルクと単位長さ当たりのねじり角度の関係がわかりました。次にパイプの場合を考えてみましょう。その前にエネルギーの概念を用いてトルクと単位長さ当たりのねじり角度の関係(T=GθJ)を導いてみましょう。

■エネルギー(U)で T=GθJ の導出

丸棒のねじりで見たとように、せん断応力のみが部材に存在している場合で部材の内部に蓄積されている単位体積当たりのエネルギーは、下図の着色されている面積に相当します。

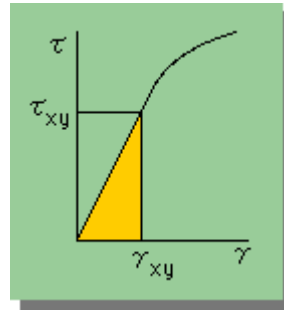


図 せん断応力 - shear angle 線図

せん断応力(τ)と shear angle(γ)との関係式($\tau = G\gamma$)を使うと、上図の三角形の面積に部材の体積を掛けた値(つまりエネルギー)は、以下のように書けます。エネルギーはスカラー量であることに注意して下さいね。

$$\begin{aligned}
 U &= L2\pi \int_0^a \frac{1}{2} \tau \gamma r dr = L\pi \int_0^a \frac{1}{G} \tau^2 r dr = 2L\pi \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{G} (G\theta r)^2 r dr \\
 &= 2L\pi \frac{1}{2} G\theta^2 \int_0^a r^3 dr \\
 &= 2L\pi \frac{1}{2} G\theta^2 \frac{a^4}{4}
 \end{aligned}$$

次にトルク(T)とねじり角度(ϕ)によるエネルギーがどのように書けるか考えてみましょう。下図に示す面積になりますね。

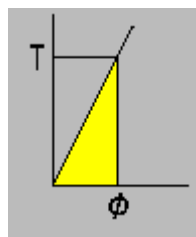


図 トルク - ねじり角線図

式で書くと次のようになりますね。トルク(T)は、既に積分した値であるということに注目して下さいね。

$$U = \frac{1}{2} T\phi$$

ここで紹介した2つのエネルギーは、同じはずですから、以下のように置けますね。

$$2L\pi \frac{1}{2} G\theta^2 \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} T\phi$$

前に定義したように、 $\theta = \phi/L$ でしたから、上式からトルクは、次のようになりますね。

$$T = G\theta \frac{\pi a^4}{2}$$

最初に導いた式と同じになりましたね。エネルギーの概念を使っても $T = G\theta J$ が導けることが解りました。

余談ですが、弾性力学にエネルギー(または変分法)の概念を最初の取り入れた人物は、皆様がよく知っているイタリア人のカステグリアーノ(**Castigliano** 1847-1884)です。彼は、大学の卒業論文にカステグリアーノの理論を紹介しています。この理論から有限要素法が生まれています。卒業後彼は、鉄道会社に勤め 37 歳で亡くなっています。彼の理論は、当時の学者を震え上がらせるほど優秀だったと言われています。最初のカステグリアーノの卒業論文を見た学者があだかも自分がやったかのように論文を出してしまったという事件があったそうです。

■丸パイプのねじり

下図に示すような断面の場合を取り上げてみます。

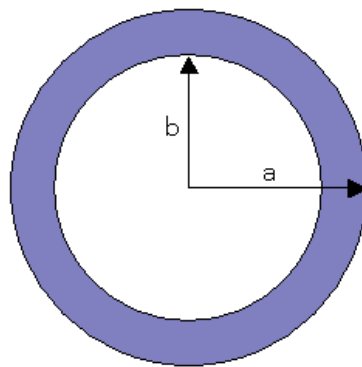


図 パイプの断面

この場合の断面二次極モーメントは、下の式で計算できます。

$$J = \frac{1}{G\theta} \int_0^{2\pi} \int_b^a r dF = 2\pi \int_b^a r^3 dr = \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4)$$

■ねじりの諸係数

バネを力(P)で距離(x)引っ張ると、関係式は $P/x=K$ となり、K を**バネ定数**と言います。こんどは、長さ(L)断面積(A)の板を力(P)で引っ張ると、伸び量(λ)は、 $\lambda = PL/(AE)$ に

なります。単位長さ当たりの伸び量($\varepsilon = \lambda / L$)を取り入れると、 $P / \varepsilon = EA$ になり、**伸びこわさ**と言います。ねじりにおいても、トルク(T)を単位長さ当たりのねじり角(θ)で割ると $T / \theta = GJ$ となり、**ねじりこわさ**と言います。まとめると下の表のようになります。

項目	関係式	こわさ	こわさの定義
バネの引っ張り	$P/x=K$	K	バネ定数
板の引っ張り	$P/\varepsilon=EA$	EA	伸びのこわさ
棒のねじり	$T/\theta=GJ$	GJ	ねじりのこわさ

表 こわさ

ビームに曲げモーメントが与えられている時、ビームの断面の最大応力を知りたいときは、 $\tau = M / (I/e)$ で計算できます。 $Z = I/e$ を**断面係数**と言います。ねじりにも同じような考えがあります。まず、 $\tau = G \theta r$ でした。最大せん断応力は、 $\tau = G \theta a$ になります。また、 $T = G \theta J$ ですから、 $\theta = T / (GJ)$ になりますね。これを最大せん断応力の式に代入すると、次の式が得られます。

$$\tau = \frac{T}{J/a}$$

この J/a を**ねじり断面係数(Z_p)**と言います。

余談ですが、ヤング係数を発見した Thomas Young(1773-1829)は、実は英国の物理学者でした。どうりで、数学者が紹介されている web site で彼を検索しても出てこない訳です。

■断面が円でない薄肉パイプのねじり

下図に示すのは、長さ L のパイプの断面です。パイプの肉厚は、 t でかなり薄いというのが条件になります。どのくらい薄ければ良いのかは、後程議論します。

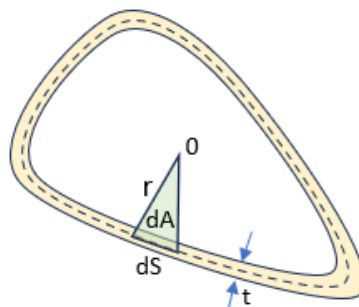


図 任意断面のパイプ

パイプをねじると、肉厚にせん断応力が図の点線に沿って表れます。すると、トルクは、下式で計算できます⁽³⁾。今回は、本来あるべき姿のベクトルで書いてあります。なぜか

と言うと、丸棒では腕(\mathbf{r})と力($\tau t d\mathbf{S}$)が常に直角でしたが、円でないパイプの場合、常に直角なることはありません。上図の原点の O は、任意の点を選択しています。

$$\mathbf{T} = \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \oint \mathbf{r} \times (\tau t d\mathbf{S})$$

上式の τt を **Shear Flow** と言って、薄肉では一定になることが知られています。詳細については書物を参考にして下さい。ここでは、 $\tau t = \text{一定}$ という事で話を進めます。すると、上の式は以下の様に書けます。

$$\mathbf{T} = \tau t \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{S}$$

ところでベクトル演算の Cross product ですが、これは 2 つベクトルから成るひし形の面積を意味しますよね。つまり、ひし形とは上図の三角形(黄色)の 2 倍の面積になります。ですから、以下のことが言えます。

$$2A = \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{S}$$

面積 \mathbf{A} の方向は、ベクトル \mathbf{r} と $d\mathbf{S}$ に直角になっています。また結果が面積になりますので、原点 O は、パイプの断面の中であればどこにあっても良いことになりますね。これらのことを考慮するとトルク T は $T = 2 \tau t A$ になります。または、以下で書けます。

$$\tau = \frac{T}{2tA}$$

これでトルク(T)とせん断応力(τ)との関係がわかりました。が、ねじり角(ϕ)との関係がまだです。ここでエネルギー関係式を使います。以下になります。

$$\frac{1}{2} T \phi = L \oint \left(\frac{1}{2} \tau \gamma \right) t dS$$

式中の γ は $\tau = G \gamma$ 、 $\theta = \phi / L$ ですから上の式は次のようになりますね。

$$T \theta = \frac{1}{G} \oint \tau^2 t dS = \frac{t}{G} \left(\frac{T}{2tA} \right)^2 \oint dS$$

上式の $\oint dS$ からはパイプの断面の周長が得られます。ここでは、周長に S を使うことにします。すると上の式は、次のように書けますね。

$$\theta = \frac{TS}{4A^2Gt}$$

または

$$T = G \left(\frac{4A^2t}{S} \right) \theta$$

上式の T を最大にするには、 S を最小に保ち A を最大にする必要がありますね。そのような過酷な条件にマッチするのは、円ですね。

例題として、下図に示すように半径が c で肉厚が t のパイプの断面を考えてみましょう。ここでは、 $(a+b)/2=c$ と仮定します。

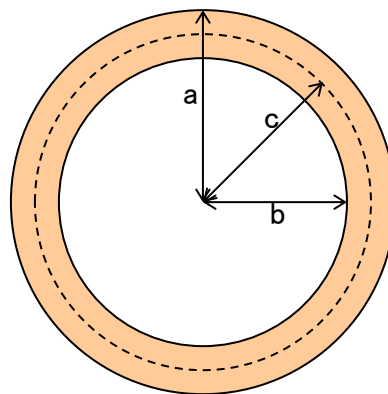


図 パイプの断面

この例題の場合、 $A=\pi c^2$ 、 $S=2\pi c$ ですから、上の式は次のようになりますね。

$$\theta = \frac{T}{2\pi c^3 Gt}$$

パイプの式ですと、単位長さ当たりのねじり角は、次のように書けましたね。

$$\theta = \frac{2T}{\pi G(a^4 - b^4)}$$

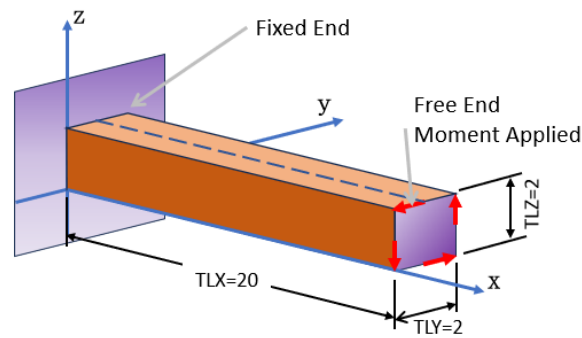
そして、 $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a+b)(a-b)(a^2 + b^2) = t(a+b)((a+b)^2 - 2ab)$ です。ここで、 $ab=c^2$ と仮定しますと、 $a^4 - b^4 = 4tc^3$ になります。この結果を上式に代入すると、以下が得られます。前に紹介した式と同じ結果になりますね。

$$\theta = \frac{T}{2\pi c^3 Gt}$$

ここで、上の仮定について詳しく調べてみましょう。外半径(a)と内半径(b)の積を半径 c と肉厚 t で書くと、 $ab=(c+t/2)(c-t/2)$ になりますよね。つまり、 $ab=c^2-t^2/4$ になります。本節の冒頭で“t がかなり薄い”と述べていますが、これは、 $(t/c)^2 \doteq 0$ という意味に置き換えることができます。

■任意断面のねじりの基本的考え

断面が円の棒をねじると、前に述べたように断面は平面のままになります。ですから、軸方向(z)の変位を無視($w=0$)することができ、 $\tau = G\theta r$ で書くことができます。ところが、任意断面だと、ねじる前と後では、平面を保っていません。例として下図の条件で計算を行ってみました。



計算モデル

計算結果の y 座標がゼロの面を図化してみました。実験とよく一致しています。

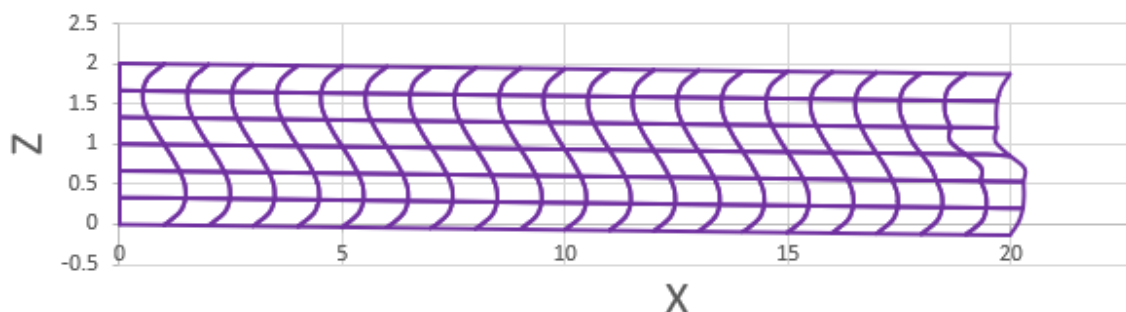


図 矩形断面をもつ棒のねじり

よって、以下に示すように軸方向の変位を関数 $\psi(x,y)$ で考慮しなければなりません。

$$w = \theta\psi(x,y)$$

ということで、ここでは書物⁽²⁾でよく紹介されている、Saint-Venant が提案した方法で任意断面のトルクとねじり角の関係を導いてみましょう。それにはまずz軸方向の変位

以外に、x-y 面の変位も書き表す必要があります。つまり、フル 3D の変位の式が必要ということですね。書物によると断面での変位は、以下の式で表すことができます。これらの変位は、丸棒のときとおなじですね。つまり、原点で変位はゼロで外に向かって線形に変位は大きくなっています。

$$u = -\theta zy \quad v = \theta zx$$

すると、歪(ε)および shear angle(γ)は、次のようになります。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

応力は、次のようになりますね。

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad \tau_{zy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

次にやらなければならないのは、上の応力が下の釣合いの式(Navier の方程式という)を満足しているかのチェックです。この式は、重力を無視しています。

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0$$

やってみると、z 軸の釣合いの式から下のラプラス方程式のみが残ります。

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y} = 0$$

この場合、境界条件は以下のようにになります。左が Neumann 型で右が Dirichlet 型になっています。

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{or} \quad \psi = 0$$

Neumann 型の境界では、側面から外へ向かっている応力がゼロということを意味しています。言い換えると、境界面に沿ってのみ応力が存在することを意味しています。

Dirichlet 型は、Reference point の拘束を意味します。

応力が複雑になっていますので、上の境界条件でラプラス方程式を解くのは少々難しいですね。もちろん、やってやれないことは無いですが。ちなみに Neumann 型の境界条件を展開すると、次のようになります。

$$0 = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}n_y + x\frac{\partial x}{\partial s} + y\frac{\partial y}{\partial s}$$

■ 応力関数法

上で説明した方法でトルクを計算するのはあきらめることにします。もう1つの手として応力関数(**stress function**)を使う方法があります。この方法は、書物でひろく紹介されています。まず、応力関数として $\phi(x,y)$ を定義します。そして、応力も次のように定義します。

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\tau_{zz} = 0$$

これらの応力をz軸方向の Navier の方程式に代入するとゼロになります。つまり、力の釣合いは満足していることになります。では、“どうやって $\phi(x,y)$ を解くのか”です。

ところで、上式の定義ですが、流体で知られている L. Prandtl が 1904 年に紹介しています。流体では、流れが層流だと、stream function とか potential function を使って流れ解析を行うことができます。その時に、上の式を使います。

解き方ですが、まず、前に定義したせん断応力と上の式を合体します。すると、以下が得られます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y} &= G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) \\ -\frac{\partial\phi}{\partial x} &= G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\end{aligned}$$

次にやることは、 ψ をなんとかして消さなければなりません。式に ϕ と ψ があったのでは面倒ですからね。ということで、上の左の式を y で微分し、右を x で微分します。そして、左から右を引くと、次の Poisson 方程式が残ります。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} + 2G\theta = 0$$

境界条件ですが、まず、Neumann 型を見てみましょう。下がその式で、前と同じです。

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0$$

式の展開をすると以下が得られます。

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} n_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$\partial \phi / \partial s = 0$ ということは、断面の境界線に沿って $\phi = \text{一定}$ ということの意味しています。せん断応力は、 ϕ の微分ですから、境界で $\phi = 0$ とおいてもかまわないということになりますね。つまり、ねじり問題では、以下の境界条件を使います。

$$\phi = 0$$

と、書物⁽¹⁾には書いてありますが、なんとなくすっきりしませんね。境界条件は問題無しとしても、**Poisson's Equation** の導出がイマイチ、ピンときません。そこで、文献調査を更に行くとエネルギー法⁽⁴⁾で上の Poisson 方程式を導く例がありました。ここでは、そのエネルギー法と **Euler-Lagrange Equation** を使って式を導いてみましょう。前にエネルギーを使って丸棒のトルクの計算を試みましたよね。そのときは、以下の様に定義しました。

丸棒の内部に蓄積している歪エネルギー = 外力エネルギー

エネルギー法では、Total Potential energy(π)を以下のように定義し、 π が最小になる点を問題の解としています。

$\pi = \text{丸棒の内部に蓄積している歪エネルギー} - \text{外力エネルギー}$

式で表すと Total Potential energy は、以下のように書けます。

$$\pi = \frac{1}{2} (\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dv - (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v) dA$$

上式の三重積分は丸棒内を、二重積分はねじり力を与えている表面を意味します。その他の表面は、せん断応力がゼロかまたは変位がゼロですので、積分の必要はありません。ここで、せん断応力の定義($\tau = G \gamma$)と変位($u = -\theta_{zy}$, $v = \theta_{zx}$)の定義を代入すると、以下が得られます。ここでは、 $z=L$ としています。

$$\pi = \frac{1}{2G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dv - \theta L (-\tau_{zx}y + \tau_{zy}x) dA$$

次に応力関数の定義を上式に代入します。また三重積分をz軸方向に積分します。すると以下が得られます。

$$\pi = \frac{L}{2G} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \theta L \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} y - \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dA$$

表面積分(右辺の第 2 項)に少し手を入れてみましょう。まず、その表面積分を Index notation で書くと以下になります。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dA = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_i dA$$

そして、次に示す微分の関係式を活用します。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi x_i}{\partial x_i} dA &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_i dA + \phi \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dA \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_i dA + 2\phi dA \end{aligned}$$

上式の左辺は、Green の定理より下に示す境界積分で書けます。

$$\oint \phi x_i n_i dS = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_i dA + 2\phi dA$$

応力関数の境界条件によると、 $\phi = 0$ でしたから、上式の境界積分もゼロになります。つまり、以下になりますね。

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} x - \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) dA = 2\phi dA$$

この結果を元の Total Potential energy に代入すると、以下が得られます。

$$\pi = \frac{L}{2G} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dA - 2\theta L \phi dA$$

両辺に $2G/L$ を掛けると、Total Potential Energy として以下が得られることとなります。ここで、 $\pi (2G/L)$ も π として取り扱っています。つまり、 π に定数を掛けても結果に影響しないからです。

$$\pi = \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 4G\theta\phi \right) dA$$

上式の意味について簡単に説明しておきます。当たり前ですが、 ϕ が厳密解 (ϕ_0) のときに、 π は最小値になります。そして、 ϕ が厳密解から遠ざかるにつれ π の値は大きくなります。

Total Potential Energy は、できあがりしました。この後、どうすれば、ねじりの微分方程式を導き出すことができるのでしょうか。このような問題を解決してくれるのが、下に示す Euler-Lagrange Equation です。詳しくは、文献⁽⁴⁾⁽⁵⁾を参考にして下さい。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi_y} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0$$

ここに $\phi_x = \partial\phi/\partial x$ 、 $\phi_y = \partial\phi/\partial y$ を意味します。

Euler-Lagrange Equation は、Total Potential Energy が最小に到達した時点で成立する微分方程式を出力してくれます。計算をすると以下が得られますね。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} &= 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi} \right) = -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \phi_y} &= 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi_y} \right) = -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \phi} &= -4G\theta \end{aligned}$$

これらを **Euler-Lagrange Equation** に代入すると、以下に示すねじりの **Poisson's Equation** が導き出されます。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} + 2G\theta = 0$$

Total Potential Energy が最小のときの解と上の微分方程式の解とは、同じということになります。これら両者のリエゾンになっているのが、Euler–Lagrange Equation なのです。

上式の **Poisson's Equation** の数値解ですが、有限要素法で簡単に得られます。解析に当たって注意しなければならないことは、要素分割数と要素タイプの選択です。これについては、文献⁽⁵⁾に詳しく紹介されていますので、そちらを参考にして下さい。

■任意断面のトルクの計算方法

トルクの計算は、丸棒と同じです。つまり、下の式で計算できます。ベクトル \mathbf{r} が腕で、ベクトル \mathbf{F} が単位面積当たりの力(つまり応力)です。

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} dx dy$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{j} \end{aligned}$$

ベクトル計算を行うと、トルク成分として z 軸方向のみが残ります。その z 軸方向のみを記述すると、以下のようにトルクをスカラーで書けますね。

$$T = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}y \right) dx dy$$

部分積分を施すと、以下のようになります。

$$T = - \oint (\phi x + \phi y) dS + (\phi + \phi) dx dy$$

ここで、応力関数の境界条件は、 $\phi = 0$ でしたので、上式の境界積分が不要になりますね。結果的に下の式でトルクが計算できることになります。

$$T = 2 \int \phi dx dy$$

と、書物⁽¹⁾にあります。ちょっとすんなりと受け入れがたい導出方法ですよ。もちろん間違っていないんですが。ここでは、下に示す **Stokes theorem** を用いて、もっとスマートにトルクを導いてみましょう。

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} dA = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

そのために、以下の変数を定義しておきます。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \\ v_x &= \phi y & v_y &= -\phi x \end{aligned}$$

では、Stokes theorem の左辺の $\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ を計算してみましょう。以下になります。

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = -2\phi - \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

よって、 $2\phi + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ を積分するとトルクが計算できます。つまり、トルクは Stokes theorem を使うと以下のように書けます。

$$T = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} x - \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) dA = 2 \phi dA + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} dA$$

または、Stokes theorem の右辺を使うと、以下のように書くことも出来ます。

$$T = 2 \phi dA + \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

応力関数の境界条件は、 $\phi=0$ でした。上式では、 $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ になります。ですから、上式の境界積分は、不要になりトルクとして以下が得られますね。

$$T = 2 \phi dA$$

結果的に前と同じ式になりましたが、すっきりした式の導き方ですよ。

■例題

では早速何か例題を計算してみましょう。文献⁽¹⁾に矩形断面のねじりの厳密解が載っていますので、それをベースに応力関数、トルク、最大せん断力を計算してみます。下図に棒の断面を示します。

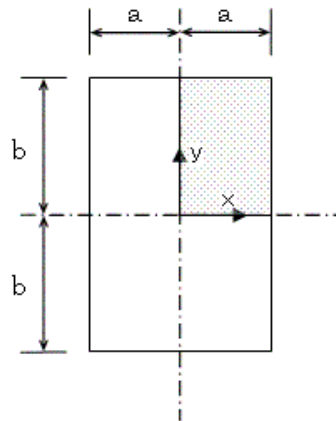


図 矩形断面のねじり

計算領域は、構造と膜の対称性から断面の右上の 1/4 を使うことにします。領域の分割には、4 節点と 9 節点要素を使いました。要素分割数を増やして行ったときの計算精度を調べることにします。計算では、データセットとして $a=1$, $b=1$, $G=1$, $\theta=1$ を用いました。下図は、そのデータセットで計算したときの厳密解です。

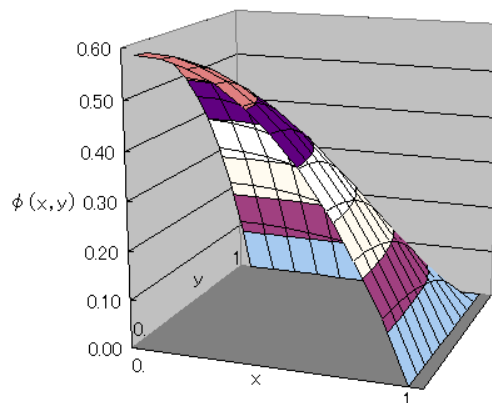


図 矩応力関数 ϕ の分布($a=1$, $b=1$, $G=1$, $\theta=1$)

応力関数の最大値は、 $x=y=0$ で発生します。値は 0.58937 になります。せん断力(τ_{zy})は、定義より応力関数を y で微分し符号を負にすると得られます。図 12.36 から $x=1$, $y=0$ の点で最大になり、値は 1.35063 です。トルクは、厳密解によると、2.24923 になります。

以下に近似解を紹介します。ここでは、前述のように 4 と 9 節点のアイソパラメトリック要素を使いました。下図に応力関数の計算結果を示します。縦軸が応力関数の値で、横軸が節点数です。

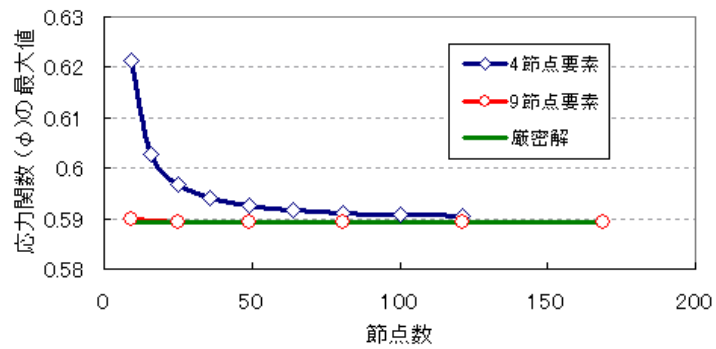


図 座標(0,0)での応力関数値(最大)と節点数の関係

形状関数が2次の9節点要素は、厳密解への収束が非常に良好と言えます。それに比べ4節点要素は、収束がかなりスローです。

下図は、トルクの計算結果です。この場合も9節点要素の収束性は、4節点要素に比べ格段に良いです。

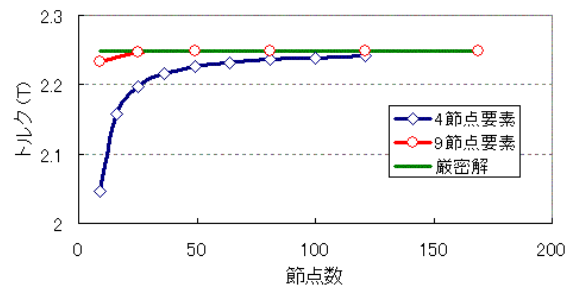


図 トルクと節点数の関係

せん断力 τ_{zy} の計算結果を下図に示します。せん断力の算出方法としては、得られた応力関数値 $\{\phi\}$ を近似式 $\{\phi(x,y)\} = [N]\{\phi\}$ に代入し、下式で計算しています。

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

せん断力の最大は、座標値の $(x,y)=(1,0)$ で発生します。

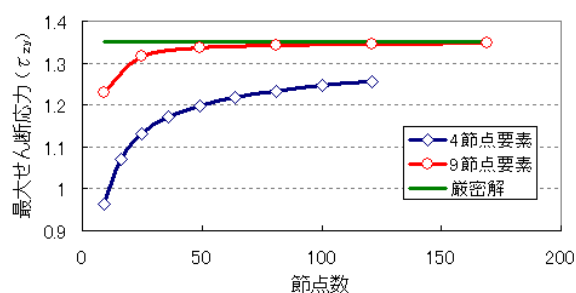


図 最大せん断力と節点数の関係

応力関数を微分しているため、せん断力の収束性は、前述の応力関数やトルクに比べかなり劣ることが上図から分かります。しかし、9 節点要素は、使用に問題の無いレベルと言えます。

■再び丸棒のトルク計算

任意断面の棒のトルクを半径が a の丸棒に適用してみましょう。 $T=G\theta J$ が得られるはずですよ。そうでないと、任意断面の計算式は全て間違いとなってしまいます。では、早速、下のねじりの Poisson 方程式を丸棒に適用してみましょう。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} + 2G\theta = 0$$

そのためには、上式を極座標で表さなければなりません。下の式を見て下さい。

$$\frac{d^2 \phi}{dr dr} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + 2G\theta = 0$$

ここでは、**Coulomb の理論**をベースにしていますので、 ϕ が軸対称であると仮定しています。また、 ϕ はスムーズな関数でどこでも微分可能でなくてはなりません。以上を考慮すると、境界条件は、以下のようになります。

$$d\phi/dr=0 \text{ at } r=0$$

$$\phi=0 \text{ at } r=a$$

まず、ねじりの Poisson 方程式の両辺に半径(r)を掛けます。以下のようになります。

$$r \frac{d^2 \phi}{dr dr} + \frac{d\phi}{dr} + 2G\theta r = 0$$

そして、以下の関係式を使います。

$$r \frac{d^2 \phi}{dr dr} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{d\phi}{dr}$$

すると、ねじりの Poisson 方程式は、以下が得られます。

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = -2G\theta r$$

上の式を1回積分して両辺を半径(r)で割ります。以下になりますね。

$$r \frac{d\phi}{dr} = -G\theta r^2 + c \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{dr} = -G\theta r + c \frac{1}{r}$$

境界条件の $d\phi/dr=0$ at $r=0$ より、 $c=0$ になり、更に積分を行うと以下になります。

$$\frac{d\phi}{dr} = -G\theta r \quad \rightarrow \quad \phi = -\frac{1}{2}G\theta r^2 + d$$

2番目の境界条件の $\phi=0$ at $r=a$ を使うと積分定数の d は、以下になります。

$$d = \frac{1}{2}G\theta a^2$$

結果的に応力関数の $\phi(r)$ として以下が得られます。

$$\phi = \frac{1}{2}G\theta(a^2 - r^2)$$

次にトルクの計算を行ってみましょう。式は、以下でしたよね。

$$\begin{aligned} T &= \phi dA = G\theta \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr d\theta \\ &= G\theta a^2 (\pi a^2) - G\theta 2\pi \int_0^a r^3 dr = G\theta \left(\pi a^4 - \frac{\pi a^4}{2} \right) \\ &= G\theta \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

Coulomb の理論と同じ結果になりましたね。これで、任意断面のねじりの計算方法は、一応理にかなっていることがわかりました。

■ **Saint-Venant** について

任意断面のねじりで業績をのこした Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant(1797-1886)についてふれておきます。彼はフランスで生まれました。死んだの

もフランスです。16歳で Navier と同じ大学に入学しています。卒業後は、土木技術者として生涯を過ごしています。彼の仕事は弾性力学や水理学(流体力学)に関する設計だったようです。彼の注目すべき業績(学者として)は、正しい(現在使われている)Navier–Stokes equations(1843年の論文)の導出だったと言われています。しかし、彼の名前が Navier–Stokes equations 関連に出てこないのは今もミステリーとされています。Stokes が彼の2年後に論文をだしたのによ。多分、彼が大学の学者でなかったのが原因ですかね。

その後 Saint–Venant は、ベクトル解析学(1845年の論文)を作り上げています。これに関しても“俺が先に考えたんだぞ”と言う人(Grassmann)が出て来たため、Saint–Venant の名前はベクトル解析学からも姿を消すことになってしまいました。

ねじりに関しての彼の研究は、1850年代に完成したと言われています。その後は、開水路の非定常方程式を導いています。

■Timoshenko について

Timoshenko については、https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Timoshenko を見て下さい。面白い話がたくさん載っています。

■Coulomb について

Charles Augustin de Coulomb (1736–1806)は、フランスの学者です。彼は、電磁気学で有名ですが、実は構造力学の学者として働いていた時間が長かったようです。

彼は、かなり裕福な家庭に生まれたようです。しかし、彼の父が投資に失敗し、家庭は離散したようです。そんな環境にありなが、彼は無事大学を卒業し、土木技術者、防御設備の建築家、等等と十数年間働くこととなります。その後は、大学に戻り、変分法を用いた摩擦と粘着についての論文をサイエンスアカデミーへ出しています。

このアカデミーでは、コンテストがあり、Coulomb は 1777年のコンテストでねじり理論を提出しグランプリを受賞しています。その後も摩擦でグランプリを受賞しています。晩年(50歳位)になって電磁気に関する7つの論文を出しています。ここには、電荷の Coulomb's law が書かれているようです。

■参考文献

(1)Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw–Hill, Inc.,1970, ISBN 07–064720–8, LCCCN 69–13617

(2)平修二, 現代材料力学, オーム社, 1991, ISBN 4–274–12760–5

(3) Shames, Irving H., Introduction to Solid Mechanics, Prentice–Hall, Inc., 1975, ISBN: 0–13–497503–0

(4)Dym, C. L. and I. H. Shames, Solid Mechanics: A Variational Approach, McGraw–Hill, Inc.,1973, ISBN 0–07–018556–5

(5)福森栄次, よくわかる有限要素法, オーム社, 2005, ISBN 4–274–06628–2